DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2017. 03. 006

3 类特殊图完美匹配数的计算公式*

唐保祥[1]，任韩[2]
（1. 天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 华东师范大学数学系，上海 200062）

摘　要：图的完美对集计数问题已经被证实是 NP—难问题，因此要得到一般图的完美对集的数目是非常困难的。该问题在蛋白质结构预测、晶体物理学、计算机科学和量子化学中都有重要的应用，对此问题的研究具有非常重要的理论价值和现实意义。用划分，求和，再递推的方法分别给出了图 $3-nT_4$，$5-nT_6$ 和 $2-2nQ_{2\times 2}$ 的完美匹配数目的计算公式，为图的完美匹配问题的应用提供了理论支持。

关键词：完美匹配；梯子；递推式；棋盘
中图分类号：O157. 5　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 -6579（2017）03 -0036 -05

The counting formula of the perfect matchings of three types of special graphs

TANG Baoxiang[1], *REN Han*[2]
（1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China）

Abstract: Perfect matching counting problems graph has been proven to be NP-hard. To get the number of perfectly matched general graph is very difficult. The issue has important applications in protein structure prediction, crystal physics, quantum chemistry and computer science. The research on this issue has very important theoretical and practical significance. The counting formula of the perfect matching for graphs $3-nT_4$, $5-nT_6$ and $2-2nQ_{2\times 2}$ are obtained by applying differentiation, summation and re-recursion . This provides the theory support for the application of perfect matching in graph.

Key words: perfect matching; ladder; recurrence relation; chessboard

图的完美匹配计数理论的研究成果已经在化学、物理学和计算机科学中得到应用，图的完美匹配的理论在很多领域有广泛应用，例如：积和式在计算机科学，特别是计算复杂性理论中有重要的地位，二分图的完美匹配的数目可以方便地表示为计算积和式的值；它也是组合数学的思想源泉，因此受到众多学者的关注[1-14]，本文给出了 3 类图完美匹配数目的计算公式，文中所给方法，适合相同结构重复出现的很多类图完美匹配数的求解。

1　基本概念

定义 1　两条长为 n 的路为 $P_1 = u_1u_2\cdots u_{n+1}$，$P_2 = v_1v_2\cdots v_{n+1}$，分别连接路 P_1 与 P_2 的顶点 u_i 与 $v_i(i = 1,2,\cdots,n+1)$ 所得到的图，称为长为 n 的梯子，记为 T_n。

定义 2　设 $m+1$ 条长为 n 的路 $P_i = u_{i1}u_{i2}u_{i3}\cdots u_{i,n+1}(i = 1,2,\cdots,m,m+1)$，连接路 P_i 与 P_{i+1} 中的顶点 u_{ij} 与 $u_{i+1,j}$（$i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,$

* **收稿日期：**2016 -08 -05
基金项目：国家自然科学基金（11171114）
作者简介：唐保祥（1961 年生），男；**研究方向：**图论和组合数学；E -mail：tbx0618@sina. com

$\cdots,n,n+1$）所得的图，称为 $m\times n$ 的棋盘。本文将 $m\times n$ 的棋盘记为 $Q_{m\times n}$。

定义 3　若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同，则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同完美匹配。

n 个长为 2 的梯子 T_2^i 的顶点集 $V(T_2^i)=\{u_{i,i},u_{i+1,i},u_{i+2,i},u_{i,i+1},u_{i+1,i+1},u_{i+2,i+1}\}$，第 i 个梯子 T_2^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_2^{i+1} 有共同的顶点 $u_{i+1,i+1},u_{i+2,i+1}$（$i=1,2,\cdots,n-1$）。这 n 个梯子形成的图记为 $1-nT_2$，如图 1 所示。

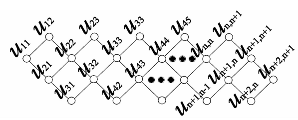

图 1　$1-nT_2$ 图

Fig. 1　Figure of $1-nT_2$

n 个长为 4 的梯子 T_4^i 地顶点集 $V(T_4^i)=\{u_{i,i},u_{i+1,i},\cdots,u_{i+4,i},u_{i,i+1},u_{i+1.i+1},\cdots,u_{i+4,i+1}\}$，第 i 个梯子 T_4^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_4^{i+1} 有共同的顶点 $u_{i+1,i+1},u_{i+2,i+1},u_{i+3,i+1},u_{i+4,i+1}$（$i=1,2,\cdots,n-1$）。这个 n 梯子形成的图记为 $3-nT_4$，如图 2 所示。

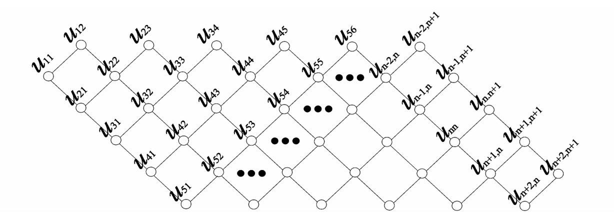

图 2　$3-nT_4$ 图

Fig. 2　Figure of $3-nT_4$

n 个长为 6 的梯子 T_6^i 地顶点集 $V(T_6^i)=\{u_{i,i},u_{i+1,i},\cdots,u_{i+6,i},u_{i,i+1},u_{i+1,i+1},\cdots,u_{i+6,i+1}\}$，第 i 个梯子 T_6^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_6^{i+1} 有共同的顶点 $u_{i+1,i+1},u_{i+2,i+1},\cdots,u_{i+5,i+1}$（$i=1,2,\cdots,n-1$）。这个 n 梯子形成的图记为 $5-nT_6$，如图 3 所示。

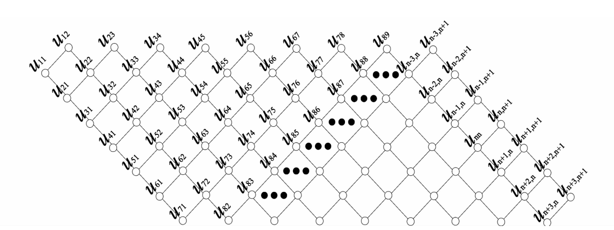

图 3　$5-nT_6$ 图

Fig. 3　Figure of $5-nT_6$

2×2 棋盘 $Q_{2\times 2}^i$ 的顶点集为 $V(Q_{2\times 2}^i)=\{u_{i,2i-1},u_{i,2i},u_{i,2i+1},u_{i+1,2i-1},u_{i+1,2i},u_{i+1,2i+1},u_{i+2,2i-1},u_{i+2,2i},u_{i+3,2i+1}\}$（$i=1,2,\cdots,2n$），将棋盘 $Q_{2\times 2}^i$ 的边 $u_{i+1,2i+1}u_{i+2,2i+1}$ 与棋盘 $Q_{2\times 2}^i$ 的边 $u_{i+1,2i+1}u_{i+2,2i+1}$ 重合（$i=1,2,\cdots,2n-1$）所得的图记为 $2-2nQ_{2\times 2}$，如图 4 所示。

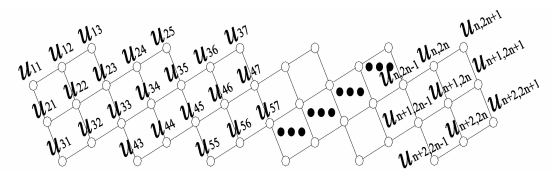

图 4　$2-2nQ_{2\times 2}$ 图

Fig. 4　Figure of $2-2nQ_{2\times 2}$

2　结果及其证明

引理 1[9]　$f(n)$ 表示 $1-nT_2$ 图的所有不同的完美匹配数，其中 $n=1,2,3,\cdots$，则 $f(n)=2n+1$。

定理 1　$g(n)$ 表示 $3-nT_4$ 图的所有不同的完美匹配数，其中 $n=1,2,3,\cdots$，则 $g(n)=2n(n+3)$。

证明　易知图 $3-nT_4$ 有完美匹配。设 $3-nT_4$ 图的完美匹配集合为 M，$4-nQ_{4\times 1}$ 图含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{11}u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 M_1,M_2，则 $M_i\neq\varnothing$（$i=1,2$），$M_1\cap M_2=\varnothing$，所以 $M=M_1\cup M_2$。故 $g(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$。

求 $|M_1|$。

情形 1　$u_{11}u_{12},u_{21}u_{22}\in M_1$

因为 $u_{11}u_{12},u_{21}u_{22}\in M_1$，所以 $u_{23}u_{33},u_{34}u_{44},u_{45}u_{55},\cdots,u_{n,n+1}u_{n+1,n+1}\in M_1$。由引理 1 中 $f(n)$ 的定义知，M_1 中这类完美匹配的数目为 $f(n)$。

情形 2　$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{51}\in M_1$

由 $g(n)$ 的定义知，M_1 中这类完美匹配的数目为 $g(n-1)$。

情形 3　$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52}\in M_1$

因为 $u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52}\in M_1$，所以

$$u_{62}u_{63},u_{73}u_{74},\cdots,u_{n+4,n}u_{n+4,n+1},u_{43}u_{53},u_{54}u_{64},\cdots,$$

$$u_{n+2,n+1}u_{n+3,n+1},u_{34}u_{44},u_{45}u_{55},\cdots,u_{n,n+1}u_{n+1,n+1}\in M_1$$

M_1 中这类完美匹配的数目与 4 圈 $u_{22}u_{23}u_{33}u_{32}u_{22}$ 的完美匹配数相等。故 M_1 中这类完美匹配的数目为 2。

综上所述，$|M_1|=f(n)+g(n-1)+2$。

求 $|M_2|$。因为 $u_{11}u_{21}\in M_2$，所以 $u_{12}u_{22},u_{23}u_{33}$，

$u_{34}u_{44},\cdots,u_{n,n+1}u_{n+1,n+1}\in M_2$。由引理 1 中 $f(n)$ 的定义知，$|M_2|=f(n)$。

综上所述，$g(n)=2f(n)+g(n-1)+2$。

因为 $f(n)=2n+1$，所以

$$g(n)=g(n-1)+4(n+1)\qquad(1)$$

解递推式（1），得

$$g(n)=g(1)+4\times[3+4+5+\cdots+n+(n+1)]$$

易知 $g(1)=8$，所以 $g(n)=2n(n+3)$。

定理 2 $\tau(n)$ 表示 $5-nT_6$ 图 的所有不同的完美匹配数，其中 $n=1,2,3,\cdots$，则 $\tau(n)=\frac{4}{3}n(n+1)(n+5)+14n-9$。

证明 易知 $5-nT_6$ 图 有完美匹配。设 $5-nT_6$ 图的完美匹配集合为 M，含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{11}u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 M_1,M_2，则 $M_i\neq\varnothing(i=1,2)$，$M_1\cap M_2=\varnothing$，所以 $M=M_1\cup M_2$。故 $\tau(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$。

求 $|M_1|$。

情形 1 $u_{11}u_{12},u_{21}u_{22}\in M_1$。

因为 $u_{11}u_{12},u_{21}u_{22}\in M_1$

所以

$$u_{23}u_{33},u_{34}u_{44},u_{45}u_{55},\cdots,u_{n,n+1}u_{n+1,n+1}\in M_1$$

由定理 1 中 $g(n)$ 的定义知，M_1 中这类完美匹配的数目为 $g(n)$。

情形 2 $u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{51},u_{61}u_{71}\in M_1$。

由 $\tau(n)$ 的定义知，M_1 中这类完美匹配的数目为 $\tau(n-1)$。

情形 3

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{51},u_{61}u_{62},u_{71}u_{72}\in M_1$$

因为 $u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{51},u_{61}u_{62},u_{71}u_{72}\in M_1$，所以

$$u_{82}u_{83},u_{93}u_{94},u_{10,4}u_{10,5},$$
$$u_{11,5}u_{11,6},\cdots,u_{n+6,n}u_{n+6,n+1},u_{n+5,n+1}u_{n+4,n+1},$$
$$u_{n+3,n+1}u_{n+2,n+1},u_{n+1,n+1}u_{n,n+1},\cdots,u_{45}u_{55}\in M_1$$

M_1 中这类完美匹配的数目与图 $G=(V(G),E(G))$ 的完美匹配数相等。其中

$$V(G)=\{u_{22},u_{32},u_{42},u_{52},u_{23},u_{33},u_{43},u_{53},u_{34},u_{44}\},$$
$$E(G)=\{u_{22}u_{23},u_{32}u_{33},u_{42}u_{43},u_{52}u_{53},$$
$$u_{22}u_{32},u_{32}u_{42},u_{42}u_{52},u_{23}u_{33},u_{33}u_{43},$$
$$u_{43}u_{53},u_{33}u_{34},u_{43}u_{44},u_{34}u_{44}\}$$

故 M_1 中这类完美匹配的数目为 6。

情形 4

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52},u_{61}u_{71},u_{62}u_{72}\in M_1$$

因为

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52},u_{61}u_{71},u_{62}u_{72}\in M_1$$

所以

$$u_{82}u_{83},u_{93}u_{94},u_{10,4}u_{10,5},u_{11,5}u_{11,6},\cdots,$$
$$u_{n+6,n}u_{n+6,n+1},u_{n+5,n+1}u_{n+4,n+1},u_{n+3,n+1}u_{n+2,n+1},$$
$$u_{n+1,n+1}u_{n,n+1},\cdots,u_{45}u_{55},u_{34}u_{44}\in M_1$$

所以 M_1 中这类完美匹配的数目与 4 圈 $u_{22}u_{23}u_{33}u_{32}u_{22}$ 的完美匹配数相等。故 M_1 中这类完美匹配的数目为 2。

情形 5

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52},u_{61}u_{71},$$
$$u_{62}u_{63},u_{72}u_{73}\in M_1$$

由

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52},u_{61}u_{71},$$
$$u_{62}u_{63},u_{72}u_{73}\in M_1,$$

知

$$u_{82}u_{83},u_{93}u_{94},u_{10,4}u_{10,5},u_{11,5}u_{11,6},\cdots,$$
$$u_{n+6,n}u_{n+6,n+1},u_{n+5,n+1}u_{n+4,n+1},u_{n+3,n+1}u_{n+2,n+1},$$
$$u_{n+1,n+1}u_{n,n+1},\cdots,u_{45}u_{55},u_{34}u_{44}\in M_1$$

所以 M_1 中这类完美匹配的数目与 4 圈 $u_{22}u_{23}u_{33}u_{32}u_{22}$ 的完美匹配数相等。故 M_1 中这类完美匹配的数目为 2。

情形 6

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{61},u_{52}u_{62},u_{71}u_{72}\in M_1$$

由

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{61},u_{52}u_{62},u_{71}u_{72}\in M_1$$

知

$$u_{82}u_{83},u_{93}u_{94},u_{10,4}u_{10,5},u_{11,5}u_{11,6},\cdots,u_{n+6,n}u_{n+6,n+1},$$
$$u_{n+5,n+1}u_{n+4,n+1},u_{n+3,n+1}u_{n+2,n+1},u_{n+1,n+1}u_{n,n+1},\cdots,$$
$$u_{45}u_{55},u_{34}u_{44}\in M_1$$

所以 M_1 中这类完美匹配的数目与 4 圈 $u_{22}u_{23}u_{33}u_{32}u_{22}$ 的完美匹配数相等。故 M_1 中这类完美匹配的数目为 2。

情形 7

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52},u_{61}u_{62},u_{71}u_{72}\in M_1$$

因为

$$u_{11}u_{12},u_{21}u_{31},u_{41}u_{42},u_{51}u_{52},u_{61}u_{62},u_{71}u_{72}\in M_1$$

所以

$$u_{82}u_{83},u_{93}u_{94}u_{10,4}u_{10,5},u_{11,5}u_{11,6},\cdots,$$
$$u_{n+6,n}u_{n+6,n+1},u_{n+5,n+1}u_{n+4,n+1},u_{n+3,n+1}u_{n+2,n+1},$$
$$u_{n+1,n+1}u_{n,n+1},\cdots,u_{45}u_{55},u_{34}u_{44}\in M_1$$

所以 M_1 中这类完美匹配的数目与 4 圈 $u_{22}u_{23}u_{33}u_{32}u_{22}$ 的完美匹配数相等。故 M_1 中这类完美匹配的数目为 2。

综上所述，$|M_1|=g(n)+\tau(n-1)+14$。

求 $|M_2|$。因为 $u_{11}u_{21},u_{12}u_{22}\in M_2$，所以

$$u_{23}u_{33},\cdots,u_{n,n+1}u_{n+1,n+1}\in M_2$$

由定理 2 中 $g(n)$ 的定义知，$|M_2| = g(n)$。故

$$\tau(n) = 2g(n) + \tau(n-1) + 14$$

因为 $g(n) = 2n(n+3)$，所以

$$\tau(n) = \tau(n-1) + 4n^2 + 12n + 14 \tag{2}$$

易知 $\tau(1) = 21$。解递推式（2），得

$$\tau(n) = \frac{4}{3}n(n+1)(n+5) + 14n - 9$$

定理 3　$\sigma(n)$ 表示图 $2-2nQ_{2\times2}$ 的所有不同的完美匹配数，其中 $n = 1,2,3,\cdots$，则 $\sigma(n) = 16\cdot10^{n-1}$。

证明　易知 $2-2nQ_{2\times2}$ 图有完美匹配。为了求 $2-2nQ_{2\times2}$ 图的完美匹配的数目，首先定义图 G，并求其完美匹配的数目。设 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 是个 4 圈，uv 是一条路。将 $2-2nQ_{2\times2}$ 图的顶点 u_{11},u_{21} 分别与顶点 v_2,v_3 各连结一条边；再将顶点 u,v 分别与顶点 v_2，u_{11} 各连结一条边所得的图记为 G，如图 5 所示。

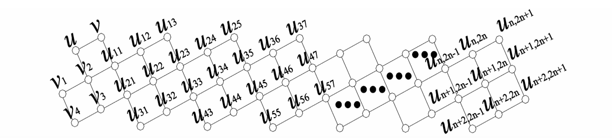

图 5　G 图

Fig. 5　Figure of G

易知图 G 有完美匹配。$h(n)$ 表示图 G 的完美匹配数。设 G 的完美匹配集合为 $M(G)$，图 G 含边 v_1v_2，v_1v_4 的完美匹配集合分别为 $M(G)_1, M(G)_2$，则 $M(G)_i \neq \varnothing(i=1,2)$，$M(G)_1 \cap M(G)_2 = \varnothing$，所以 $M(G) = M(G)_1 \cup M(G)_2$。

故 $h(n) = |M(G)| = |M(G)_1| + |M(G)_2|$。

求 $|M(G)_1|$。因为 $v_1v_2 \in M(G)_1$，所以 $v_3v_4, uv \in M(G)_1$。由 $\sigma(n)$ 的定义知，$|M(G)_1| = \sigma(n)$。

求 $|M(G)_2|$。

情形 1

$$v_1v_4, v_2v_3, uv \in M(G)_2$$

由 $\sigma(n)$ 的定义知，$M(G)_2$ 中此类完美匹配的数目为 $\sigma(n)$。

情形 2

$$v_1v_4, uv_2, vu_{11}, v_3u_{21}, u_{31}u_{32} \in M(G)_2$$

情形 2.1

$$v_1v_4, uv_2, vu_{11}, v_3u_{21}, u_{31}u_{32}, u_{12}u_{22}, u_{13}u_{23} \in M(G)_2$$

由 $h(n)$ 的定义知，$M(G)_2$ 中此类完美匹配的数目为 $h(n-1)$。

情形 2.2

$$v_1v_4, uv_2, vu_{11}, v_3u_{21}, u_{31}u_{32}, u_{12}u_{13}, u_{22}u_{23} \in M(G)_2$$

由 $h(n)$ 的定义知，$M(G)_2$ 中此类完美匹配的数目为 $h(n-1)$。

综上所述，$|M(G)_2| = \sigma(n) + 2h(n-1)$。故 $h(n) = 2\sigma(n) + 2h(n-1)$。

设 $2-2nQ_{2\times2}$ 图的完美匹配集合为 M，$2-2nQ_{2\times2}$ 图含边 $u_{14}u_{11}$，$u_{14}u_{13}$ 的完美匹配集合分别为 M_1, M_2，则 $M_i \neq \varnothing(i=1,2)$，$M_1 \cap M_2 = \varnothing$，所以 $M = M_1 \cup M_2$。故 $\sigma(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$。

求 $|M_1|$。

情形 1

$$u_{11}u_{12}, u_{21}u_{22}, u_{31}u_{32}, u_{13}u_{23} \in M_1$$

由 $h(n)$ 的定义知，M_1 中此类完美匹配的数目为 $h(n-1)$。

情形 2

$$u_{11}u_{12}, u_{21}u_{31}, u_{22}u_{32}, u_{13}u_{23} \in M_1$$

由 $h(n)$ 的定义知，M_1 中此类完美匹配的数目也为 $h(n-1)$。故 $|M_1| = 2h(n-1)$。

求 $|M_2|$。

情形 1

$$u_{11}u_{21}, u_{12}u_{22}, u_{13}u_{23}, u_{31}u_{32} \in M_2$$

由 $h(n)$ 的定义知，M_2 中此类完美匹配的数目为 $h(n-1)$。

情形 2

$$u_{11}u_{21}, u_{31}u_{32}, u_{12}u_{13}, u_{22}u_{23} \in M_2$$

由 $h(n)$ 的定义知，M_2 中此类完美匹配的数目也为 $h(n-1)$。故 $|M_2| = 2h(n-1)$。

综上所述，

$$\sigma(n) = 4h(n-1) = 8\sigma(n-1) + 8h(n-2)$$

因为 $h(n) = 2\sigma(n) + 2h(n-1)$，所以有

$$\sigma(n) = 8\sigma(n-1) + 16\sigma(n-2) + 16h(n-3) \tag{3}$$

$$\sigma(n-1) = 8\sigma(n-2) + 8h(n-3) \tag{4}$$

由式（3）$-2\times$（4），得

$$\sigma(n) = 10\sigma(n-1) \tag{5}$$

解递推式（5），得 $\sigma(n) = 10^{n-1}\sigma(1)$。易知 $\sigma(1) = 16$，故 $\sigma(n) = 16\cdot10^{n-1}$。

参考文献：

[1]　LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory [M]. New York: North-Holland Press, 1986.

[2]　CIUCU M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry [J]. J Combin Theory Ser A, 1998, 77(1): 67-97.

[3]　JOCKUSCH W. Perfect matchings and perfect squares [J]. Journal of Combinatorial Theory, 1994, 67(1):100

－115.

[4] ZHANG H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158: 257－272.

[5] ZHANG H P, ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13 (3): 295－304.

[6] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154(1):145－157.

[7] KRÁL D, SERENI J S, STIEBITZ M. A new lower bound on the number of perfect matchings in cubic graphs [J]. Siam Journal on Discrete Mathematics, 2009, 23 (3): 1465－1483.

[8] KARDOS F, KRÁL D, MISKUF J, et al. Fullerene graphs have exponentially many perfect matchings [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2009, 46(2): 443－447.

[9] 唐保祥,任韩. 2类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 15－17.
TANG B X, REN H. The analytic formula of the number of perfect matchings of two types of graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55 (4): 15－17.

[10] 唐保祥,任韩. 3类3－正则图中的完美对集数[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2016, 39(1): 21－24.
TANG B X, REN H. The number of perfect matchings in two types of 3－regular graph [J]. J of Nanjing Normal University (Natural Science Edition), 2016, 39 (1): 21－24.

[11] 唐保祥,任韩. 3类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2014, 47(5): 11－16.
TANG B X, REN H. The enumeration of perfect matchings in three types of special graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2014, 47 (5): 11－16.

[12] 唐保祥,任韩. 4类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志, 2015, 35(3): 626－634.
TANG B X, REN H. Recursive method for finding the number of perfect matchings of the four types of graphs [J]. J of Math, 2015, 35(3): 626－634.

[13] 唐保祥,任韩. 两类3正则图中的完美匹配数[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 53(5): 54－58.
TANG B X, REN H. The number of perfect matchings in two types of 3－regular graph [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(5): 54－58.

[14] 唐保祥,任韩. 6类图完美匹配的数目[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2012, 51(2): 40－44.
TANG B X, REN H. The number of perfect matchings in six types of graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2012, 51(2): 40－44.